

先验知识在压缩感知求解 电磁场问题中的应用

曹欣远¹, 陈明生², 吴先良^{1,2}, 沈 晶^{1,2}

(1. 安徽大学电子信息工程学院, 安徽合肥 230039; 2. 合肥师范学院电子信息工程学院, 安徽合肥 230601)

摘 要: 快速求解三维目标宽角度电磁散射问题一直都是计算电磁学中的一个难点问题. 前期研究表明: 在传统矩量法中引入压缩感知技术后可仅通过数次观测还原出全部入射角度下的电流, 从而有效减少计算量. 为获取应用压缩感知时所需的观测次数并讨论合适的稀疏变换选择, 本文提出一种基于物理光学法的先验技术. 该技术可对宽角度下电流系数的投影稀疏度及相应的观测次数进行预估, 为利用压缩感知求解宽角度问题的快速算法特别是稀疏转换基的选择提供了先验知识, 在实际计算前确定了相关参数, 从而为该快速算法应用于工程实践奠定了良好基础.

关键词: 物理光学法 (PO); 先验知识; 压缩感知 (CS); 矩量法 (MoM)

中图分类号: O441.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013) 12-2361-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.12.007

Application of Apriori Knowledge to Solving Problems of Electromagnetic Field by Compressed Sensing

CAO Xin-yuan¹, CHEN Ming-sheng², WU Xian-liang^{1,2}, SHEN Jing^{1,2}

(1. School of Electronics and Information Engineering, Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China;

2. School of Electronics and Information Engineering, Hefei Normal University, Hefei, Anhui 230601, China)

Abstract: Fast analysis of electromagnetic scattering problems of three-dimensional(3D) objects over a wide incident angle is always a difficult problem in computational electromagnetics. Previous study shows that introducing compressed sensing(CS) technique into method of moments(MoM) can reconstruct currents over all incident angles from only several measurements, thereby it can improve the computation efficiently. For the purpose of acquiring total number of measurements and choice of sparse transform when using compressed sensing, a priori technique based on physical optics(PO) is proposed in this paper. By this technique, sparsity of the projection of current coefficients over the wide angle and the number of times of measurement can be pre-estimated, thereby apriori knowledges can be provided for the fast algorithm of solving scattering problems over a wide angle by CS(especially the choice of sparse bases), thus the fast algorithm can be applied into engineering practice in a real sense.

Key words: physical optics(PO); prior knowledge; compressed sensing(CS); method of moments(MoM)

1 引言

三维目标在宽角度激励下的电磁散射问题的快速计算是计算电磁学一直以来的一个难点. 矩量法(Method of Moments, MoM)^[1]作为积分方程方法的代表, 尽管凭借其极高的计算精确度被广泛应用于各类实际问题, 甚至在没有解析解的情况下经常代替解析解被用作其他数值方法的参照, 并且发展出了自适应积分方法(Adaptive Integral Method, AIM)^[2]、快速多极子技术(Fast

Multipole Method, FMM)^[3]、多层快速多极子技术(Multi-level Fast Multipole Method, MLFMM)^[4]、共轭梯度快速傅里叶变换法(Conjugate Gradient - Fast Fourier Transform Method, CG-FFT)^[5]等快速算法, 然而在面对宽角度散射问题时, 仍无法做到快速求解, 只能针对每个入射角度分别反复迭代计算, 效率低, 耗时长.

本课题组在前期工作^[6]中通过引入压缩感知(Compressed Sensing, CS)^[7]技术, 成功构建了一种富含空间信息的电磁场激励源, 有效的减少了传统矩量法在求解宽

角度散射问题时的计算量,实现了对三维宽角度问题的快速求解.其基本思想为:设计一个新的入射源,该入射源具备全部入射角度下的入射信息,在其照射下利用矩量法求出相应的包含全部入射角度下的电流系数信息的一个观测值,在数次观测的基础上恢复出所有入射角度下的电流系数.其具体的实现方式为:将各入射角度下的激励随机叠加,进而产生一个新的激励,利用矩量法求解出其对应的一个同样对各入射角度下的电流向量进行随机叠加的新电流向量,通过数次随机叠加可获得若干个新电流向量,这数次的随机叠加即为压缩感知中的数次观测,再利用稀疏转换基^[8]和重构算法^[9]即可从这数个观测值中还原出全部入射角度下的所有电流向量.

然而,针对各个不同的具体散射目标,在没有参考解的情况下,可实现完美重构所需要的观测次数以及合适的稀疏变换选择均因缺乏先验知识而无法确定,这成为将该快速算法推广至实际工程应用的一个瓶颈.针对该问题,本文提出一种基于物理光学法(Physical Optics, PO)^[10]的先验技术.通过该技术可以预先获得宽角度下电流系数大致的投影稀疏度及相应的所需观测次数参考值,使得在将压缩感知引入矩量法前即可估算出在使用各不同稀疏转换基时的观测次数,从而为实际应用该快速算法特别是选取合适的稀疏转换基提供先验知识,计算结果表明,以物理光学这一高频算法的计算结果作为先验知识,CS方法的计算误差随观测次数的下降,在不同稀疏变换下均吻合良好.

2 先验技术的实现

在解决电磁散射问题时,除传统的数值方法如 MoM、FDTD 等外,还有一类高频近似方法^[11].与传统数值方法相比,高频近似方法有着计算速度快、内存需求少等优点,在计算目标为电大尺寸时尤其有着广泛的应用.本文的先验技术基于高频近似方法中的物理光学法,对引入压缩感知求解三维宽角度散射问题所需的观测次数进行预先估算.

物理光学法将散射目标分为亮区和暗区,其上的电流密度分别为:

$$\mathbf{J}^{\text{PO}} = \begin{cases} 2\mathbf{n} \times \mathbf{H}_i & (\text{照明区}) \\ 0 & (\text{阴影区}) \end{cases} \quad (1)$$

其中, \mathbf{n} 为散射体表面外法向, \mathbf{H}_i 为入射波在散射体表面位置的磁场强度.使用 RWG 基函数^[12]对散射体表面进行三角网格剖分,则电流密度可表示为:

$$\mathbf{J}^{\text{PO}} = \sum_{i=1}^N \gamma_i \cdot \mathbf{f}_i(\mathbf{r}), \quad (2)$$

其中, γ_i 为电流系数, \mathbf{f}_i 为 RWG 基函数:

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{l_i}{2A_i^+} \boldsymbol{\rho}_i^+, & \mathbf{r} \text{ 在第 } i \text{ 个三角形对中的 } + \text{ 三角形上} \\ \frac{l_i}{2A_i^-} \boldsymbol{\rho}_i^-, & \mathbf{r} \text{ 在第 } i \text{ 个三角形对中的 } - \text{ 三角形上} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

其中 l_i 为第 i 个三角形对的公共边长, A_i^+ 、 A_i^- 分别为第 i 个三角形对的正、负三角形的面积, $\boldsymbol{\rho}_i^+$ 为第 i 个三角形对中正三角形的自由顶点指向观察点 \mathbf{r} 的矢量, $\boldsymbol{\rho}_i^-$ 为第 i 个三角形对中正三角形的自由顶点指向观察点 \mathbf{r} 的矢量.利用文献^[13]中的方法,过 RWG 三角形对公共边的中点,分别在正、负三角形所在的面上作与公共边正交的单位矢量,如图 1 所示.

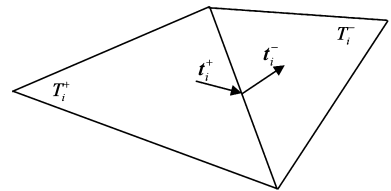


图1 过RWG基函数三角形对公共边中点作与公共边正交的单位矢量

记第 k 个三角形对的公共边中点为 \mathbf{r}_k , 则有:

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{t}_k^\pm = \begin{cases} 1, & (k = i) \\ 0, & (k \neq i) \end{cases} \quad (4)$$

在式(2)的等式两边同乘以 \mathbf{t}_k^\pm , 并将式(1)、(4)代入, 可得在 PO 亮区中的电流系数为

$$\gamma_k = (\mathbf{t}_k^+ + \mathbf{t}_k^-) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r}_k)), \quad (5)$$

暗区内的值则为 0. 至此, 可将宽角度下的全部电流系数求出, 并记作矩阵形式:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1N} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nN} \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中 N 为剖分出的三角形对的个数, n 为全部入射角度的数目.

将压缩感知算法直接应用到电流系数矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的每一列, 可得到由 PO 方法算出的宽角度电流系数信号针对不同稀疏转换基的投影稀疏度及相应观测次数, 以此作为先验知识, 筛选出其中观测次数较少的基作为最终使用的稀疏转换基, 其对应的先验观测次数值作为实际将 CS 引入 MoM 时的观测次数参考值. 由于电流的 PO 解与矩量法解相比忽略了各面元间的相互耦合作用, 因而它能以较小的复杂度获得信号的“概貌”, 且这种概貌能随着散射目标电尺寸的增大而愈加接近真实信号, 所以以其来测试压缩感知的观测数目以及合

适的基函数选择的结果具备可参考性,以下进行数值试验验证.

3 实验验证

沿用文献[6]中的理想导体球和理想立方体导体并再引入一个理想四棱锥导体以及一个简易飞机模型作为散射目标.入射波设定为沿 x 轴方向极化,其频率 $f=3 \times 10^9$ Hz.以高斯随机矩阵作为观测矩阵;通过将勒让德多项式^[14]、切比雪夫多项式^[15]、第二类切比雪夫多项式^[16]、拉盖尔多项式^[17]、埃尔米特多项式^[18]这五类经典的正交多项式逐阶离散化可构造出相应的五类正交基,将其作为稀疏转换基用于测试比较;恢复算法选择正交匹配追踪算法(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)^[19],该算法的主要思想为:在求解未知数序列为 K 稀疏的欠定方程组时,利用 $m(m \geq K)$ 次“寻找系数矩阵中与残差最相似的列→通过最小二乘法更新残差”的迭代计算来不断逼近原方程组的解.由前期的数值实验可以发现,宽角度下同一散射体表面不同三角形对上的电流系数信号在同一稀疏转换基下的投影稀疏度大致相同或接近,因此,在确保实验结果不失有效性的前提下可将以下实验验证过程简化为仅针对个别面元进行,即随机选择任一个或几个三角形对上的电流系数信号进行采样(可将对其的观测次数作为对全部电流系数信号所需的观测次数的代表)及验证比较.

3.1 对理想导体球的测试

利用式(5)求解出 PO 算法下的宽角度电流系数 γ_{ij} ,任取其中一个三角形对上的值进行入射角度为 $1^\circ \sim 360^\circ$ 的采样,并以傅里叶正交反变换基作为稀疏转换基为例将采样信号稀疏投影表示,与用矩量法计算出的同一三角形对上的电流系数信号的稀疏投影进行比

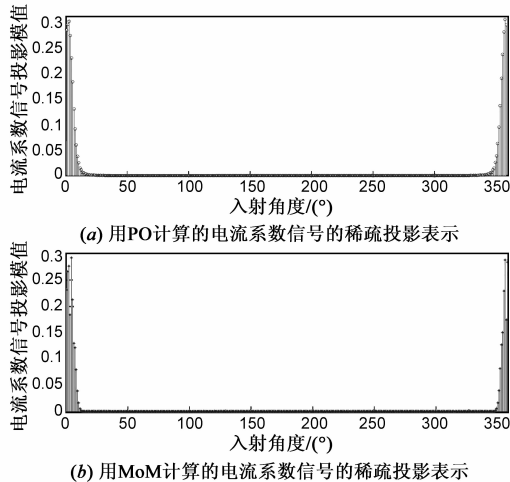


图2 对同一三角形对的宽角度电流系数信号的PO计算结果和MoM计算结果的稀疏投影比较

较,如图2所示.

由图2可见,用PO计算的电流系数信号的投影的稀疏情况与用矩量法的计算结果相近,因此,将对PO计算结果进行观测的次数作为先验估算值具备可行性.

将稀疏转换基设为通过对5类经典正交多项式离散化所构造出的5个正交基(分别称作勒让德基、切比雪夫基、第二类切比雪夫基、拉盖尔基、埃尔米德基),鉴于球体为旋转对称目标,为减少实验中的运算量,可将宽角度范围缩小至 180° 进行考察,比较用PO计算和用MoM中引入CS计算时这5类正交基各自所需的观测次数值和相应的重构误差,如图3所示,其中重构误差的定义式为:

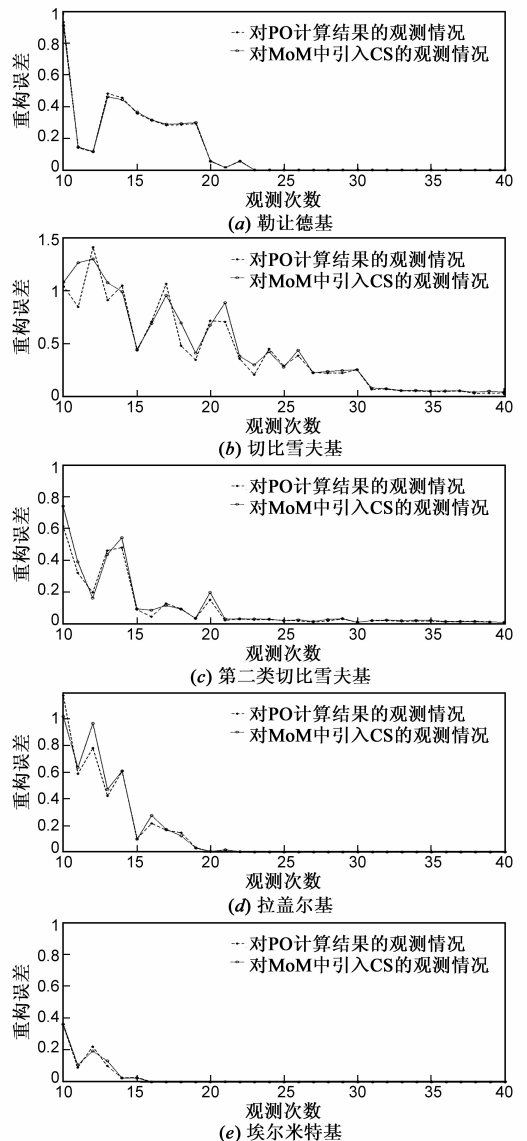


图3 PEC球在各稀疏转换基下的观测次数与重构误差关系比较

$$\Delta = \frac{\|\mathbf{I} - \hat{\mathbf{I}}\|_2}{\|\mathbf{I}\|_2} \times 100\%, \quad (7)$$

其中, \mathbf{I} 表示原宽角度电流系数信号(即 PO 解或 MoM 解), $\hat{\mathbf{I}}$ 表示 CS 的恢复结果。

由图 3 可以看出, 对用 PO 计算的电流系数信号的先验观测次数及相应重构误差与在 MoM 中引入 CS 时的结果基本一致, 皆反映出埃尔米德基、拉盖尔基及勒让德基的效果较好(在观测次数分别达到 16、22、23 时重构误差接近 0)。由此可见, 该先验知识是准确的, 在实际将 CS 引入 MoM 求解时即可选用这三类稀疏转换基并设置相应的观测次数值。

3.2 对理想立方体导体的测试

与理想导体球类似, 同样对理想立方体导体进行宽角度范围为 180° 的对比试验, 结果如图 4 所示。

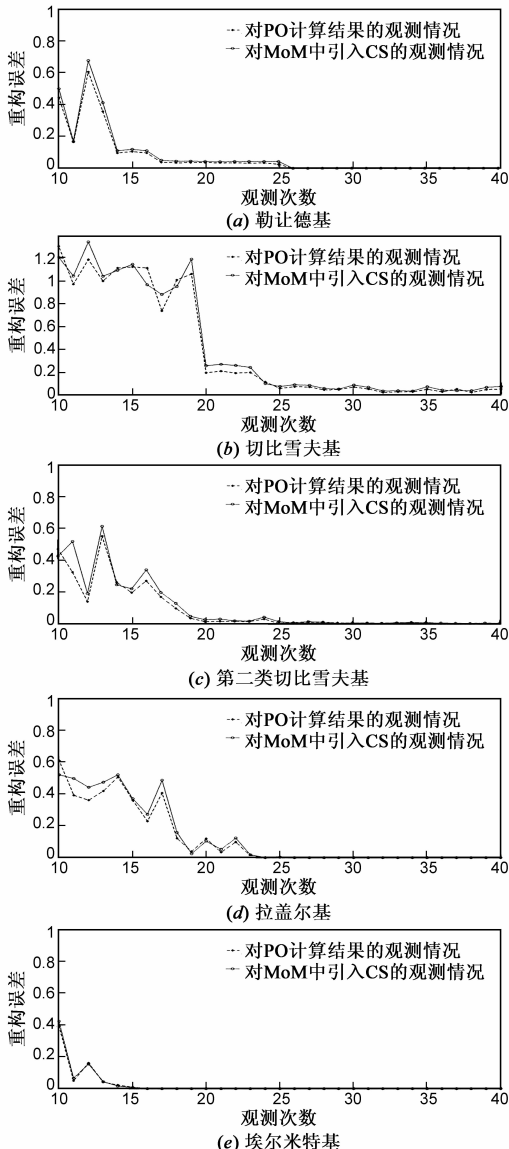


图4 立方体PEC在各稀疏转换基下的观测次数与重构误差关系比较

从图 4 可以看出, 对于理想立方体导体, 对用 PO 计算的电流系数信号的先验观测次数与在 MoM 中引入 CS 时的结果亦基本保持一致。

3.3 对理想四棱锥导体的测试

以高为 0.1m、底面的长和宽分别为 0.1m 和 0.05m 的正四棱锥为例, 宽角度范围依然设为 180° , 实验结果如图 5 所示。

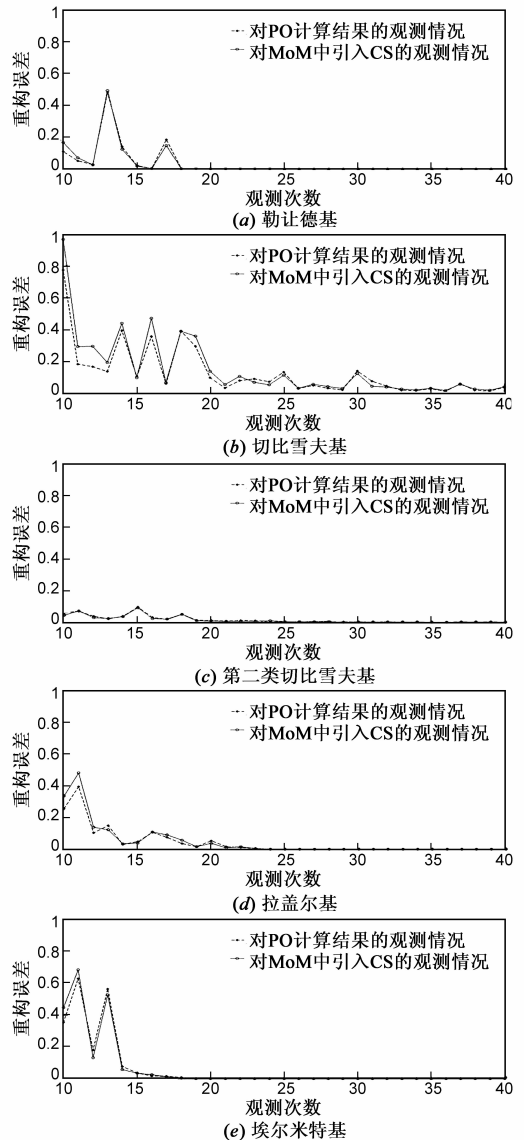


图5 四棱锥PEC在各稀疏转换基下的观测次数与重构误差关系比较

可见, 在散射目标为四棱锥导体时, 基于 PO 的先验知识与实际在 MoM 中引入 CS 的恢复误差随观测次数的变化值也能较好的吻合。

3.4 对简易飞机模型的测试

对如图 6 所示的简易飞机模型同样进行 180° 宽角度范围的测试, 实验结果如图 7 所示。

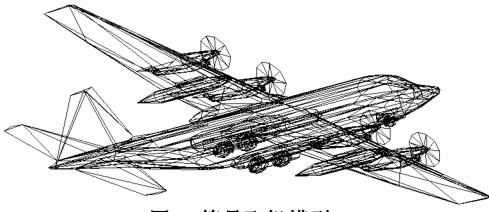


图6 简易飞机模型

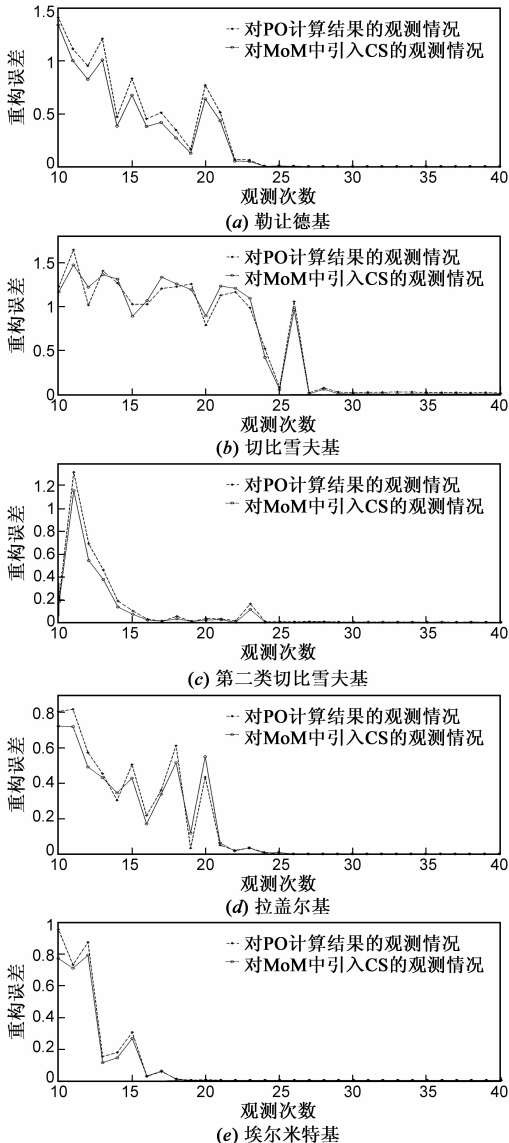


图7 简易飞机模型在各稀疏转换基下的观测次数与重构误差关系比较

由以上实验结果可见,基于 PO 的先验观测次数仍然具备有效性,可作为参考解。

4 结论

本文提出一种在将压缩感知引入矩量法快速求解三维宽角度电磁散射问题前可预先估算出各稀疏转换

基下所需观测次数的先验技术.该技术从物理光学法入手,通过将压缩感知算法直接应用于 PO 算得的宽角度电流系数信号上,从而获得先验观测次数.进而可通过对各稀疏转换基下所需先验观测次数的比较,筛选出观测次数较少的基,将其用于实际在 MoM 中引入 CS 的宽角度快速算法中.先验知识的获取使得该快速算法具备了真正应用于实际工程问题的能力。

参考文献

- [1] Makarov S. MoM antenna simulations, with Matlab: RWG basis functions[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2001, 43(5): 100 - 107.
- [2] Ewe W B, LI L W, Leong M S. Fast solution of mixed dielectric/conducting scattering problem using volume-surface adaptive integral method[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2004, 52(11): 3071 - 3077.
- [3] Dembart B, Yip E. The accuracy of fast multipole methods for Maxwell's equations[J]. IEEE Computational Science & Engineering, 1998, 5(3): 48 - 56.
- [4] Tzoulis A, Eibert T F. Efficient electromagnetic near-field computation by the multilevel fast multipole method employing mixed near-field/far-field translations[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2005, 4(1): 449 - 452.
- [5] Catedra M F, Ruiz F, Gago E. Analysis of arbitrary metallic surfaces conformed to a circular cylinder using the conjugate gradient-fast Fourier transform (CG-FFT) method[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1990, 38(2): 286 - 289.
- [6] Cao X Y, Chen M S, Wu X L. Application of compressed sensing to solving 3D electromagnetic scattering problems over a wide angle[A]. 2012 International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology (ICMMT) II[C]. Shenzhen: Microwave Society of Chinese Institute of Electronics, 2012. 1 - 4.
- [7] PEYRE G. Best basis compressed sensing[J]. IEEE Signal Processing, 2010, 58(5): 2613 - 2622.
- [8] Du H M, Chen M S, Wu X L. The structure of the sparse basis function in compressive sensing for fast analysis of wide-angle monostatic scattering problems[A]. 2012 International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology (ICMMT) III[C]. Shenzhen: Microwave Society of Chinese Institute of Electronics, 2012. 1 - 3.
- [9] Liu Y L, Wang K, Qang R H, HE J W. Signal recovery by compressed sensing in IR-UWB systems[J]. Chinese Journal of Electronics, 2012, 21(2): 339 - 344.
- [10] LI E S. Physical optics models for the backscatter response of road-surface faults and roadside pebbles at millimeter-wave frequencies[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propaga-

tion, 2003, 51(10): 2862 – 2868.

- [11] Wang T S, Yuan L, Wang G, Fang N, Wang B F. Visual computing method of radar cross section for target coating with plasma[J]. Chinese Journal of Electronics, 2009, 18(3): 579 – 582.
- [12] Yla-Oijala P, Taskinen M. Calculation of CFIE impedance matrix elements with RWG and $n \times$ RWG functions[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2003, 51(8): 1837 – 1846.
- [13] Jakobus U, Landstorfer F M. Improved PO-MM hybrid formulation for scattering from three-dimensional perfectly conducting bodies of arbitrary shape[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1995, 43(2): 162 – 169.
- [14] Guan P F, Phong D H. Partial Legendre transforms of non-linear equations[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2012, 140(11): 3831 – 3842.
- [15] Cody W J, Henry C T. Chebyshev approximations for the exponential integral $E_i(x)$ [J]. Mathematics of Computation, 1969, 23(106): 289 – 303.
- [16] Nicholson D, Rabinowitz P, Richter N, Zeilberger D. On the error in the numerical integration of Chebyshev polynomials [J]. Mathematics of Computation, 1971, 25(113): 79 – 86.
- [17] Lord R D. Integrals of products of Laguerre polynomials[J]. Mathematics of Computation, 1960, 14(72): 375 – 376.
- [18] Thangavelu S. Summability of Hermite expansions II [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1989, 314(1): 143 – 170.

- [19] Cai T T, Lie W. Orthogonal matching pursuit for sparse signal recovery with noise [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2011, 57(7): 4680 – 4688.

作者简介



曹欣远 男, 1983 年出生于安徽合肥, 现为安徽大学电子信息工程学院博士研究生, 主要研究方向为压缩感知、矩量法、雷达信号处理等。

E-mail: xycaoBL@163.com

陈明生(通信作者) 男, 1981 年出生于安徽南陵. 博士, 合肥师范学院电子信息工程学院教授, 安徽大学博士生导师, 2010 年 1 月至 2012 年 1 月在中国科学技术大学电子科学与技术博士后流动站从事博士后研究工作. 研究方向为电磁散射与目标识别、电磁场数值方法以及小波信号处理。

E-mail: chenms@ustc.edu.cn

吴先良 男, 1955 年出生于安徽亳州. 教授, 安徽大学博士生导师, 现任合肥师范学院院长. 研究方向为电工电子学、电磁场理论、移动通信、复杂目标散射与逆散射理论、微波技术与天线、电磁场数值方法等领域。

沈晶 女, 1983 年出生于安徽安庆. 现合肥师范学院讲师兼在读安徽大学电子信息工程学院博士, 主要研究方向为信号处理、小波等。